

10.3.

Ex. 2:  $\lambda_1 = 0$   $\lambda_2 = 1$   $K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$   $K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$   $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$X = PY = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 e^t \end{bmatrix}}_Y = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 e^t \\ -c_1 + c_2 e^t \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$$

Ex. 4:  $\lambda_1 = -\sqrt{2}$   $\lambda_2 = \sqrt{2}$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$X = PY = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{-\sqrt{2}t} \\ c_2 e^{\sqrt{2}t} \end{bmatrix}$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} e^{-\sqrt{2}t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} e^{\sqrt{2}t}$$

2/2

10.4.

Ex. 5

$$x' = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{3} \\ 9 & 6 \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix}}_{F(t)} e^t$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = 7$$

$$\Rightarrow K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$x_c = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} e^{7t}$$

$$x_p = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^t$$

$$x_p' = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^t$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^t = \begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{3} \\ 9 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix} e^t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4a + \frac{1}{3}b - 3 \\ b = 9a + 6b + 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{55}{36} \\ b = -\frac{19}{4} \end{cases} \Rightarrow x_p(t) = \begin{bmatrix} \frac{55}{36} \\ -\frac{19}{4} \end{bmatrix} e^t$$

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} e^{7t} + \begin{bmatrix} \frac{55}{36} \\ -\frac{19}{4} \end{bmatrix} e^t$$